

DEMOSTRACIÓN DE LA ENERGÍA DEL TORAX EN LA DESFIBRILACIÓN SUBAMORTIGUADA

Ecuación de la Energía del tórax E_T .

$$E_T = \int_0^{Td} id(t)^2 R_T dt$$

Corriente en función del tiempo

$$id(t) = \frac{Vm}{\omega L} e^{-\beta t} \text{sen}(\omega t)$$

Ecuación de la Energía Almacenada E_A .

$$E_A = \frac{1}{2} Vm^2 C$$

El siguiente desarrollo consiste en demostrar que la Energía del tórax es igual a:

$$E_T = \frac{R_T}{R_\Sigma} E_A$$

DEMOSTRACIÓN

$$E_T = \int_0^{Td} \left(\frac{Vm}{\omega L} e^{-\beta t} \text{sen}(\omega t) \right)^2 R_T dt$$

$$E_T = \frac{Vm^2}{\omega^2 L^2} R_T \int_0^{Td} e^{-2\beta t} \text{sen}^2(\omega t) dt$$

Se desarrolla la integral:

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t} \text{sen}^2(\omega t) dt$$

Para poder realizar un mejor desarrollo se hace el siguiente reemplazo:

$$\text{sen}^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))$$

De esta manera la integral quedaría:



$$\frac{1}{2} \int_0^{Td} e^{-2\beta t} (1 - \cos(2wt)) dt$$

$$\frac{1}{2} \left[\int_0^{Td} e^{-2\beta t} dt - \int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt \right]$$

Se desarrolla cada integral por aparte y luego se agrupa:

$$1. \int_0^{Td} e^{-2\beta t} dt = -\frac{1}{2\beta} e^{-2\beta t}$$

$$2. \int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt \text{ Para poder desarrollar la integral se realiza por partes:}$$

$$u = e^{-2\beta t} \quad dV = \cos(2wt) dt$$

$$du = -2\beta e^{-2\beta t} dt \quad V = \frac{1}{2w} \text{sen}(2wt), \text{ Entonces: } uV - \int Vdu$$

$$= \frac{e^{-2\beta t}}{2w} \text{sen}(2wt) - \left(-\frac{2\beta}{2w} \int_0^{Td} e^{-2\beta t} \text{sen}(2wt) dt \right)$$

$$= \frac{e^{-2\beta t}}{2w} \text{sen}(2wt) + \frac{\beta}{w} \int_0^{Td} e^{-2\beta t} \text{sen}(2wt) dt; \text{ para desarrollar esta integral nuevamente}$$

se realiza por partes:

$$u = e^{-2\beta t} \quad dV = \text{sen}(2wt) dt$$

$$du = -2\beta e^{-2\beta t} dt \quad V = -\frac{1}{2w} \cos(2wt), \text{ Entonces: } uV - \int Vdu$$

$$= -\frac{e^{-2\beta t}}{2w} \cos(2wt) - \frac{\beta}{w} \int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt$$

Se reemplaza este último desarrollo en la integral anterior:

$$= \frac{e^{-2\beta t}}{2w} \text{sen}(2wt) + \frac{\beta}{w} \left[-\frac{e^{-2\beta t}}{2w} \cos(2wt) - \frac{\beta}{w} \int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt \right]$$

La última integral que se obtuvo es igual a la original, quedando una integral circular.

Para desarrollarla se agrupa quedando:

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt = \frac{e^{-2\beta t}}{2w} \text{sen}(2wt) - \frac{\beta}{2w^2} e^{-2\beta t} \cos(2wt) - \frac{\beta^2}{w^2} \int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt$$

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt + \frac{\beta^2}{w^2} \int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt = \frac{e^{-2\beta t}}{2w} \text{sen}(2wt) - \frac{\beta}{2w^2} e^{-2\beta t} \cos(2wt)$$

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt \left(1 + \frac{\beta^2}{w^2} \right) = \frac{e^{-2\beta t}}{2w} \text{sen}(2wt) - \frac{\beta}{2w^2} e^{-2\beta t} \cos(2wt)$$



$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt = \frac{e^{-2\beta t} \operatorname{sen}(2wt) - \frac{\beta}{2w^2} e^{-2\beta t} \cos(2wt)}{\left(1 + \frac{\beta^2}{w^2}\right)}$$

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt = \frac{w e^{-2\beta t} \operatorname{sen}(2wt) - \beta e^{-2\beta t} \cos(2wt)}{\frac{2w^2}{w^2 + \beta^2}}$$

El desarrollo de la integral será:

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt = \frac{w e^{-2\beta t} \operatorname{sen}(2wt) - \beta e^{-2\beta t} \cos(2wt)}{2(w^2 + \beta^2)}$$

Entonces, se reemplaza las respuestas 1 y 2 se obtiene:

$$\frac{1}{2} \left[\int_0^{Td} e^{-2\beta t} dt - \int_0^{Td} e^{-2\beta t} \cos(2wt) dt \right]$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2\beta} e^{-2\beta t} - \frac{w e^{-2\beta t} \operatorname{sen}(2wt) - \beta e^{-2\beta t} \cos(2wt)}{2(w^2 + \beta^2)} \right]$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2\beta} e^{-2\beta t} - \frac{w e^{-2\beta t} \operatorname{sen}(2wt)}{2(w^2 + \beta^2)} + \frac{\beta e^{-2\beta t} \cos(2wt)}{2(w^2 + \beta^2)} \right]_0^{Td}$$

Se reemplazan los límites:

$$\frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{2\beta} e^{-2\beta Td} - \frac{w e^{-2\beta Td} \operatorname{sen}(2wTd)}{2(w^2 + \beta^2)} + \frac{\beta e^{-2\beta Td} \cos(2wTd)}{2(w^2 + \beta^2)} \right) - \left(-\frac{1}{2\beta} e^0 - \frac{w e^0 \operatorname{sen}(0)}{2(w^2 + \beta^2)} + \frac{\beta e^0 \cos(0)}{2(w^2 + \beta^2)} \right) \right]$$

Cuando la Exponencial de euler es Td, ésta función tiende a cero, por lo tanto, el límite válido es en cero; quedando:

$$\frac{1}{2} \left[-\left(-\frac{1}{2\beta} e^0 - \frac{w e^0 \operatorname{sen}(0)}{2(w^2 + \beta^2)} + \frac{\beta e^0 \cos(0)}{2(w^2 + \beta^2)} \right) \right]$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\beta} - \frac{\beta}{2(w^2 + \beta^2)} \right]$$

Después de tener el resultado de la integral, la energía del tórax queda:



$$E_T = \frac{Vm_2^2}{w^2 L^2} R_T \int_0^{Td} e^{-2\beta t} \sin^2(\omega t) dt$$

$$E_T = \frac{Vm_2^2}{w^2 L^2} R_T \left(\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\beta} - \frac{\beta}{2(\omega^2 + \beta^2)} \right] \right)$$

$$E_T = \frac{Vm_2^2}{2w^2 L^2} R_T \left[\frac{1}{2\beta} - \frac{\beta}{2(\omega^2 + \beta^2)} \right]$$

Esta energía queda en función de β y ω , pero cada uno es:

$$\beta = \frac{R_\Sigma}{2L} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2}$$

Al desarrollar cada una de estas se obtiene:

$$3. \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2\left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)} = \frac{1}{\frac{R_\Sigma}{L}} = \frac{L}{R_\Sigma}$$

$$4. \frac{\beta}{2(\omega^2 + \beta^2)} = \frac{\frac{R_\Sigma}{2L}}{2\left(\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2}\right]^2 + \left[\frac{R_\Sigma}{2L}\right]^2\right)} = \frac{\frac{R_\Sigma}{2L}}{2\left(\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2 + \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2\right)} = \frac{\frac{R_\Sigma}{2L}}{\frac{2}{LC}} = \frac{CR_\Sigma}{4}$$

Reemplazamos las respuestas 3 y 4 en la ecuación de la Energía del tórax:

$$E_T = \frac{Vm_2^2}{2w^2 L^2} R_T \left[\frac{1}{2\beta} - \frac{\beta}{2(\omega^2 + \beta^2)} \right]$$

$$E_T = \frac{Vm_2^2}{2w^2 L^2} R_T \left[\frac{L}{R_\Sigma} - \frac{CR_\Sigma}{4} \right]$$

Reemplazo ω^2 :

$$w^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2$$

$$E_T = \frac{Vm_2^2}{2L^2 \left(\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2\right)} R_T \left[\frac{L}{R_\Sigma} - \frac{CR_\Sigma}{4} \right]$$

$$E_T = \frac{Vm_2^2}{2L^2 \left(\frac{1}{LC} - \frac{R_\Sigma^2}{4L^2}\right)} R_T \left[\frac{L}{R_\Sigma} - \frac{CR_\Sigma}{4} \right]$$



$$E_T = \frac{Vm_2^2}{2L^2 \left(\frac{4L - CR_\Sigma^2}{4L^2C} \right)} R_T \left[\frac{4L - CR_\Sigma^2}{4R_\Sigma} \right]$$

$$E_T = \frac{2CVm_2^2}{4L - CR_\Sigma^2} R_T \left[\frac{4L - CR_\Sigma^2}{4R_\Sigma} \right]$$

$$E_T = \frac{CVm_2^2}{2R_\Sigma} R_T$$

Pero como se sabe que $E_A = \frac{1}{2}Vm_2^2C$

Entonces la energía del tórax será:

$$E_T = \frac{R_T}{R_\Sigma} E_A$$